МГУ - СТАРТ

Дополнительное вступительное испытание (ДВИ-2025)

по математике в МГУ имени М.В. Ломоносова

3 поток, 15.07.2025

1. Найдите наибольшее целое число, меньшее числа $\sqrt{7}+\sqrt{8}$.

2. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$ действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном $n \geqslant 3$ равенству

$$a_n = (-1)^n \cdot 3 \cdot a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}.$$

Найдите $\sqrt[2024]{a_{2025}}$, если известно, что $a_1 = 1$ и $a_2 = 4$.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2^2\left(x^{\sqrt{2}}\right) - 3\log_4 x^6 + 13} > \log_2\left(\frac{x}{2}\right).$$

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{12}{\sin^2 2x} + \dfrac{12}{\sin x \sin 2x} = \dfrac{3}{\sin^2 x}$.

5. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отмечены точки D, E, F соответственно. На BD и на FC как на диаметрах построены окружности. Эти окружности касаются отрезка AE в одной и той же точке. Найдите DF, если известно, что $AB : AC = 2 : 3$, $BD : FC = 1 : 2$ и что $BC = 12$.

6. Положительные действительные числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ удовлетворяют неравенствам

$$a_i + a_j \geqslant a_{i+j}$$

при всех натуральных i, j, таких что $i + j \leqslant 7$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} + \frac{a_5}{5} + \frac{a_6}{6} + \frac{a_7}{7}}{a_7}.$$

7. Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен 1. Радиус окружности, вписанной в основание этой пирамиды, равен $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.